第５章　為替レートのランダムウォークネスとファンダメンタルズ：動学的確率的一般均衡分析からの視点

加　納　　　隆

１．はじめに

為替レートの文献において長年研究者を悩ませ続けてきた最も頑健な実証的観察は、「変動為替レート制を採用する２国間の名目為替レートはおおよそランダムウォーク過程（酔歩過程）に従う」ということではないだろうか。Meese and Rogoff（1983）の先駆的な研究以後、過去多くの為替レート分析が直面してきた実証的事実は、ブレトン・ウッズ体制後の様々な通貨間の変動為替レートの時系列データにおいて、将来予測の精度という点でシンプルなランダムウォークモデルに頑健に打ち勝つことのできる開放マクロ経済の均衡モデルを未だ見いだしていない事である。[1] この過去30年間にわたる悲惨な結果から、均衡マクロモデルは名目為替レート変動を説明できないというある種の「諦観」が国際金融の分野に染み付いてしまっているようにさえ見える。

国際通貨制度の「トリレンマ」（trilemma）の議論に従えば、変動相場制を採用する国は自国の金融政策の独立性と自由な国際資本移動による効率的な資源配分を達成できる一方、為替レートの過度な変動に晒されるおそれがある。変動為替制度下における為替レートの安定化という政策目標のためには、まずはランダムウォーク過程で近似される為替レートの変動が、構造的なマクロモデルの一意的な均衡解として経済のファンダメンタルズによって十分に説明されることが求められる。[2] 為替レートのランダムウォークネスを生成できない開放マクロ経済学および国際金融論の現状は、それゆえ研究者だけではなく政策担当者にとっても極めて悩ましい。

しかし最近の開放マクロ経済学および国際金融論における大きな進展の一つとして、為替レートのランダムウォークネスが経済モデルの均衡解として近似的に導出されることが、徐々に

1　過去になされた為替レート決定モデルの実証分析は膨大である。包括的なサーベイはSarno and Taylor（2002）またはMark（2001）が詳しい。また代表的な為替レート決定理論の邦語による直観的な導入としては加納（2013）を参照。

2　もちろんサンスポット均衡のような複数均衡解を考えることも理論上可能であるが、そのような自己実現的期待によって生成される為替レートの変動への適切かつ実行可能な政策対応を考えることは難しい。

ではあるが明らかにされつつある。本稿の主な目的は（微かな希望かもしれないが）この朗報を俯瞰しその政策的なインプリケーションを抽出することにある。このためEngel and West（2005）およびNason and Rogers（2008）による為替レートのランダムウォークネスに関する均衡モデル分析と、それらに続くKano（2013）による動学的確率的一般均衡（DSGE：Dynamic Stochastic General Equilibrium）モデルへの適用を概説し、データにおいて観察される為替レートのランダムウォークネスがシンプルな２国からなる開放経済DSGEモデルの一意的な均衡解として描写できることを示す。[3] Kano（2013）の重要な貢献は、ランダムウォークに従う為替レートの変動を産み出す経済的なファンダメンタルズを識別できることにある。そしてファンダメンタルズが、無限の将来に及ぶ貨幣供給量の長期トレンドの２国間差に対する、外国為替市場参加者の持つ現在の期待からの予期せざる乖離（サプライズ）であることが理論上明らかとなる。この結論から、各国中央銀行が貨幣供給量の長期トレンドを規定する金融政策ルールを適切に設定し、それを遵守することが、為替レート変動の安定化にとって必須であることが示唆される。このモデルにおいては、市場参加者に長期的な金融政策運営を十分に理解浸透させその信頼を醸成することを通じて、ファンダメンタルズに関する安定的な期待形成を計ることが、為替レートの安定化に向けた政策当局間の国際協調の要諦である。

以下まず第２節では為替レートのランダムウォークネスを紹介する。第３節では為替レートのランダムウォークネスを均衡の現象として導出した過去の研究とその問題点を要約する。第４節では本稿のモデルを導入し、第５節でモデルの均衡解として為替レートがランダムウォークに従う事を示す。第６節は結語である。

2．為替レートのランダムウォークネス

ランダムウォーク過程を導入するため、ここで仮に変動為替相場制を採用する自国と外国を考える。このとき自国通貨の外国通貨に対する相対価格が名目為替レートであるが、あるt期のそれをS_tと表す。S_tがランダムウォーク過程に従うということは、数学的には次のように示される。

$$S_t = S_{t-1} + \epsilon_t$$

ここでϵ_tは系列相関のないホワイトノイズ（白色雑音）である。また国際金融の文献では、以下のように為替レートの自然対数値がランダムウォークに従うとデータで観察されている。

$$\ln S_t = \ln S_{t-1} + \epsilon_t \tag{1}$$

3　さらにEngel and West（2005）モデルの実証研究として、Balke et al。(2013）を挙げことができる。

為替レートが統計的にランダムウォークに従う時、１期前の為替レートを所与とすると今期の為替レートが増価するか減価するかはホワイトノイズの実現値だけに依存し、その確率はそれぞれ５割である。[4] また１期前の為替レートを条件とした今期の為替レートの期待値（予測）は１期前の実現値に等しく、他のいかなる経済的情報もこの条件付き予測の向上に貢献しない。ここで $E_{t-1}\ln S_t$ を $t-1$ 期の利用可能な全ての情報に条件づけられた t 期の為替レートの期待値だとすると、

$$E_{t-1}\ln S_t = \ln S_{t-1}$$

が成立する。つまり今期の為替レートの最適予測は前期の為替レートの実現値になり、その他の情報は過剰である。それゆえ為替レート変化率 $\Delta\ln S_t \equiv \ln S_t - \ln S_{t-1}$ の系列相関はゼロである。

さらに為替レートがランダムウォークに従う時、為替レートに対する今期のショック ϵ_t は将来の為替レートに対して恒久的な効果を持つ。この事を確認するため、ある時点 t から(1)式を過去にわたって第０期まで繰り返し代入すると次のような結果を得る：

$$\ln S_t = \ln S_0 + \epsilon_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

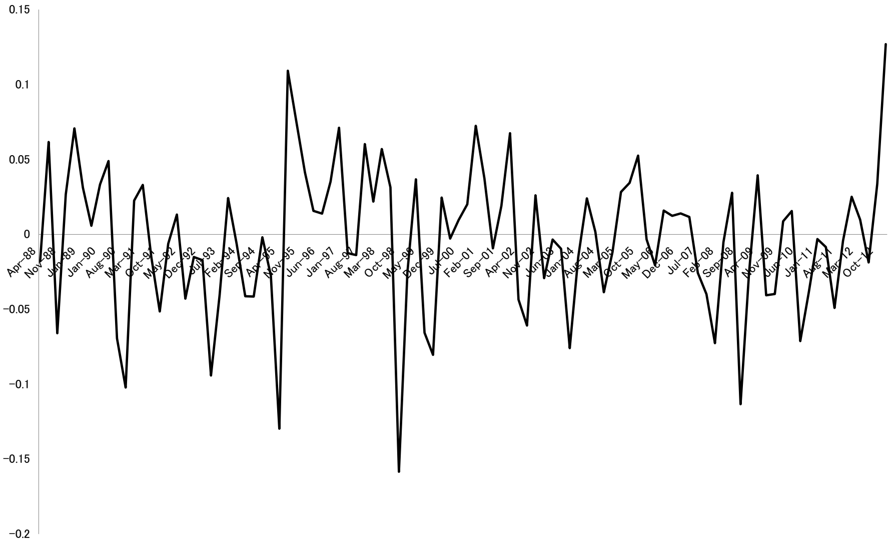
このことは過去実現したいかなるショックも現在時点の為替レートに恒久的な影響を及ぼすことを示している。これがランダムウォーク過程が恒久的な確率的トレンドと考えられる理由である。

図1：円ドルレート（四半期）

4　このとき為替レートの時間を追った動きは、まるで夜道をふらふらと歩く酩酊者の歩みのように見えることからランダムウォーク過程と呼ばれる。

図１は1988年の第１四半期から2013年の第１四半期までの円ドルレートの四半期データをプロットしたものである。円ドルレートは非常にゆっくりとした大きな長期的な動きとその周辺を幾分細かく振動する短期的な動きから成り立つ時系列であり、ランダムウォークを代表とする恒久的な非定常過程の特質を有している。また図２は同為替レートの変化率 $\Delta \ln S_t$ のプロットである。この変化率の動きにははっきりとした規則性はなく、ランダムウォーク過程が意味するようにホワイトノイズでの近似が適切である。実際、データで推定された１階の自己相関係数は0.1277でありその標準誤差は0.1024なので、系列相関がゼロであるという帰無仮説を標準的な有意水準で棄却する事はできない。

図2：円ドルレート変化率



３． 均衡解としてのランダムウォークネス

Engel and West（2005）は「為替レートのアセットアプローチ」として知られている２国からなる開放経済の部分均衡モデルに基づいて、為替レートがランダムウォーク過程で近似される均衡解が存在することを示した。このアセットアプローチは２国それぞれでの貨幣市場における貨幣需要関数と金融政策を記述する貨幣供給関数、国際金融市場において取引される両国債券間の裁定条件であるカバーなしの金利裁定式、および財市場における裁定条件である購買力平価から成り立つ。[5] ここで２国は自国（h）と外国（f）で、$M_{i,t}, P_{i,t}, Y_{i,t},$ および $r_{i,t}$ をそれぞれ$i = h, f$ 国の t 期での貨幣需要（供給）、一般物価水準、生産量、および名目金利とす

5　Engel and West（2005）や Balke et al.（2013）が示しているように、購買力平価が厳密に成立していなくても為替レートのランダムウォークネスは導出可能である。

る。また S_t を自国通貨の外国通貨に対する名目為替レートとする。このとき自国と外国の貨幣需要関数は対数線形化されたケインジアンタイプのLM曲線として以下のように与えられる。

$$\ln M_{i,t} - \ln P_{i,t} - \ln Y_{i,t} = -\phi r_{i,t}$$

すなわち、実質残高 $\ln M_{i,t}/P_{i,t}$ は取引動機によって経済取引規模を示す生産量 $\ln Y_{i,t}$ の増加関数として示され、投機的動機によって貨幣保有の機会費用である名目金利 $r_{i,t}$ の減少関数として与えられる。ここでパラメーター $\phi > 0$ は実質貨幣需要の利子弾力性を示している。さらに対数線形化されたカバーなしの金利裁定式は

$$E_t \ln S_{t+1} - \ln S_t = r_{h,t} - r_{f,t}$$

で与えられる。ここで E_t は t 期の情報に条件付けられた数学的期待値でありこのモデルでは合理的期待を意味する。このカバーなし金利裁定式の下で為替レートの期待変化率は２国間の金利差で決定される。さらに購買力平価式は

$$\ln P_{f,t} + \ln S_t = \ln P_{h,t}$$

で記述されるが、２国間の一般物価水準は共通通貨単位で等しい。

上記の両国の貨幣需要関数を金利平価式に代入しさらに購買力平価式を用いると、以下のような為替レートに関する１階の確率差分方程式が得られる。

$$\ln S_t = \omega E_t \ln S_{t+1} + (1-\omega)(\ln M_t - \ln Y_t)$$

ここで $\ln Y_t \equiv \ln Y_{h,t} - \ln Y_{f,t}$ と $\ln M_t \equiv \ln M_{h,t} - \ln M_{f,t}$ はそれぞれ生産量と貨幣供給量の２国間対数差であり、それぞれ非定常な１階の和分過程（以下 I(1) 過程と記す）に従うと仮定する。また $\omega \equiv \phi/(1+\phi)$ は１より小さい正の値を取る定数である。それゆえ上記確率差分方程式は将来に向け前向きに解く事が可能であり、適切な横断面条件の下でバブル解を排除した後のファンダメンタル解は一意に決まり

$$\ln S_t = (1-\omega)\sum_{i=0}^{\infty} \omega^i E_t(\ln M_{t+i} - \ln Y_{t+i}) \tag{2}$$

で与えられる。それゆえ一般の資産価格決定理論と同様にこのアセットアプローチ（2）では、為替レートの資産としての役割に注目し、将来のファンダメンタルズ $\ln M_{t+i} - \ln Y_{t+i}$ の割引ファクター ω の下での期待割引現在価値で為替レートが決定する。

Nason and Rogers（2008）が詳細に定式化しているように、この為替レートの期待割引現在価値モデル（Present value model：PVM）（2）は次の為替レート変化率に関する誤差修

正モデル（Error correction model：ECM）の表現を持つ：

$$\Delta \ln S_t = \frac{1-\omega}{\omega}(\ln S_{t-1} - \ln M_{t-1} + \ln Y_{t-1}) + u_{s,t}$$

ここで $u_{s,t}$ は１期前の情報集合と直交する合理的期待誤差（rational expectations errors）である（$E_{t-1}u_{s,t} = 0$）。このとき割引ファクター ω が１に近づく際、為替レートの期待変化率は１期前の誤差修正項 $\ln S_{t-1} - \ln M_{t-1} + \ln Y_{t-1}$ と無相関となりゼロに収束する。

$$\lim_{\omega \to 1} E_{t-1}\Delta \ln S_t = 0$$

それゆえ為替レートの対数値はランダムウォークで近似される。

このように為替レートが均衡でランダムウォークに従う理由は以下のように要約できる。まず仮定からファンダメンタルズ $\ln M_t - \ln Y_t$ は非定常の I (1) 過程に従う。Beveridge and Nelson（1981）の分解定理に従えば、どのような I(1) 過程もランダムウォークに従うトレンド要素とその他の定常過程に従う循環要素に分解できる。[6] ファンダメンタルズ $\ln M_t - \ln Y_t$ も I(1) 過程に従うので、ランダムウォーク過程とその他の定常過程に分解できる。一方PVM（2）が意味するように、割引ファクター ω が１に近づくと、無限の将来のファンダメンタルズに対する期待値が割り引かれないため現在の為替レートの決定にますます大きな影響を持つようになる。無限の将来のファンダメンタルズの現在時点での期待値に影響を持つのは、ランダムウォークに従うファンダメンタルズの恒久的なトレンド要素だけであり、その極限では将来のファンダメンタルズの期待割引現在価値がこのランダムウォークに従うトレンド要素で完全に支配されることになる。それゆえ為替レートはランダムウォークに近似される。

Engel and West（2005）のアセットアプローチに対する一つの批判は、貨幣需要関数がケインズ型の貨幣需要関数としてアドホックに与えられミクロの基礎付けがない事である。Nason and Rogers（2008）は２国からなる開放経済DSGEモデルにおいて、実質貨幣残高が効用関数の変数として含まれるいわゆるmoney-in-utilityモデルから貨幣需要関数を導出する。[7] そしてそのような開放経済DSGEモデルにおいても、為替レートの期待割引現在価値モデルが導出される事を示した。この際Engel and Westモデルとの重要な違いは、ファンダメンタルズの構成要素が（2）式のように生産量の２国間対数差ではなく消費の２国間対数差として規定されることにある。これは貨幣需要関数がmoney-in-utilityモデルから導出され、貨幣需要に対する資産所得効果が生産量ではなく消費に依存する事に起因する。また割引ファクターは貨幣需要の利子弾力性の関数ではなく、市場で決定される割引ファクター（つまり市場名

6　Beveridge and Nasonの分解定理についてはたとえばHamilton（1994）を参照。
7　Money-in-utilityモデルと貨幣需要関数の導出に関する説明はWalsh（2003）が詳しい。

目金利の逆数）のモデルの定常解における値として与えられ、より現実的かつ直観的な解釈が可能となっている。

しかしながらNason and Rogers（2008）のDSGEモデルによる分析も完全なものとは言いがたい。まず第１の問題はファンダメンタルズを構成する２国間の消費の対数差を外生的な確率変数として仮定している事にある。しかしDSGEモデルにおいて消費は内生変数なので、一般均衡解として為替レートを導出する際、消費の均衡経路を決定する消費の異時点間最適性条件（すなわちオイラー方程式）を無視する事はできない。第２にNason and Rogers（2008）は消費の対数差がＩ(1)過程に従うとし、その理論的根拠として確率トレンドとしての２国間の全要素生産性（Total Factor Productivity：TFP）の対数差がやはりI（1）過程に従うと仮定している。この仮定の問題点は２国モデルの均斉成長経路を規定できない事にある。[8] その際モデルの均斉成長経路上の定常解も規定できないので、Nason and Rogers（2008）が行っているような均斉成長経路上の定常解近傍でのモデルの対数線形近似が実際にはできない。最後にこのモデルは状態条件付き基本債券（State contingent securities）が発行できず各国の債券のみが消費平準化を達成する金融手段として取引されている不完備な国際金融市場に立脚している。このような不完備金融市場においては、何らかの金融市場のフリクションによる対外純資産の蓄積時における追加的コストを仮定しないと、２国間の対外純資産の分布が定常過程に従わずその際モデルの均斉成長経路上の定常解がやはり規定できない。[9] Kano（2013）はこれらのNason and Rogersモデルの問題点を修正した上で、Nason and Rogers（2008）と同様に市場における割引ファクターの定常値が１に近づく際、為替レートは均衡においてランダムウォークに従うことを示した。次節ではこのKano（2013）の分析を簡略化した上で、為替レートのランダムウォークネスを一般均衡解として導出する。その時貨幣供給量のトレンド要素の２国間対数差に対する期待からの意図せざる乖離がランダムウォークに従う為替レートの変動を生成する本源的なショックであるということがモデルの重要な理論的インプリケーションとして示される。後述するように、このインプリケーションは実際の為替レートのデータを観察理解する上で極めて有用かつ示唆に富んでいる。

４．開放経済DSGEモデル

本稿のモデルはKano（2013）で分析された２国からなる開放経済DSGEモデルを簡略化し

8　均斉成長経路上では全ての実質変数は同じ率で成長する。Ireland（2013）も指摘するように、両国のTFP が非定常の確率過程に従う時、両者が共和分の関係にないと均斉成長経路が存在せずまた均斉成長経路上の定常解も規定できない。

9　例えばSchmitt-Groh_e and Uribe（2003）を参照。このほか世代重複モデル、資産や消費水準に依存する主観的割引率、さらには借入制約等の仮定が、定常的な対外純資産分布を生成することが知られている。

たものである。自国と外国のそれぞれには以下の生涯効用を最大化する代表的な家計が無限期間存在する。

$$\sum_{j=0}^{\infty}\beta^{j}E_{t}\left\{\ln C_{i,t+j}+\phi\ln\left(\frac{M_{i,t+j}}{P_{i,t+j}}\right)\right\},\quad 0<\beta<1,\quad \text{for } i=h,f$$

ここで $C_{i,t}$、$M_{i,t}$、$P_{i,t}$ は i 国の消費、名目貨幣残高、および一般物価水準である。また β は主観的割引ファクターを示し、この家計が将来の効用を現在時点でどれだけ割り引くかその程度を示している。このような実質残高が変数として与えられている生涯効用関数を money-in-utility functionと呼び、代表的家計が正の名目貨幣残高を需要する貨幣的均衡の理論的根拠となっている。以下で見るように ϕ は貨幣需要関数のパラメーターである。

このような対数効用の下、両国の家計は消費の異時点間平準化を行うインセンティブを持つ。このため両国の家計は不完備な国際金融市場において、自国債と外債を購入する事ができる。自国の代表的家計はこの生涯効用関数を以下の予算制約の下で最大化する。

$$B_{h,t}^{h}+S_{t}B_{h,t}^{f}+P_{h,t}C_{h,t}+M_{h,t}=(1+r_{h,t-1}^{h})B_{h,t-1}^{h}+S_{t}(1+r_{h,t-1}^{f})B_{h,t-1}^{f}+M_{h,t-1}+P_{h,t}Y_{h,t}+T_{h,t}\quad(3)$$

同じように外国の代表的家計はその生涯効用関数を以下の予算制約の下で最大化する。

$$\frac{B_{f,t}^{h}}{S_{t}}+B_{f,t}^{f}+P_{f,t}C_{f,t}+M_{f,t}=(1+r_{f,t-1}^{h})\frac{B_{f,t-1}^{h}}{S_{t}}+(1+r_{f,t-1}^{f})B_{f,t-1}^{f}+M_{f,t-1}+P_{f,t}Y_{f,t}+T_{f,t}\quad(4)$$

ここで $B_{i,t}^{l}$, $r_{i,t}^{l}$, $Y_{i,t}$, $T_{i,t}$, および S_{t} はそれぞれ l 国で発行された債券の i 国での保有残高、l 国で発行された債券の i 国での名目金利、 i 国の生産量、 i 国の政府移転支払、そして自国と外国の間の名目為替レートである。各国の生産量 $Y_{i,t}$ は賦存量（endowment）として与えられ、トレンド要素としてのTFP $A_{i,t}$ と景気循環要素 $y_{i,t}$ に分解され恒等式 $Y_{i,t}=y_{i,t}A_{i,t}$ を満たすように構成される。

自国と外国における代表的家計の最適化問題の必要条件は、家計の予算制約式（3）および（4）に加えて以下の３式によって与えられる。

$$\frac{1}{P_{i,t}C_{i,t}}=\beta(1+r_{i,t}^{i})E_{t}\left(\frac{1}{P_{i,t+1}C_{i,t+1}}\right),\quad \text{for } i=h,f \quad(5)$$

$$(1+r_{i,t}^{h})E_{t}\left(\frac{1}{P_{i,t+1}C_{i,t+1}}\right)=\frac{(1+r_{i,t}^{f})}{S_{t}}E_{t}\left(\frac{1}{P_{i,t+1}C_{i,t+1}}\right),\quad \text{for } i=h,f \quad(6)$$

$$\frac{M_{i,t}}{P_{i,t}}=\phi\left(\frac{1+r_{i,t}^{i}}{r_{i,t}^{i}}\right)C_{i,t},\quad \text{for } i=h,f \quad(7)$$

ここで (5)、(6)、(7) 式はそれぞれ消費配分の異時点間最適性を保証するオイラー方程式と、自国債と外国債の間の裁定条件を示すカバーなしの金利平価式、および自国貨幣市場における貨幣需要関数と示している。

両国政府は新規貨幣発行益を単にそれぞれの国の家計に一括分配する。それゆえ各国政府の予算制約は

$$M_{i,t} - M_{i,t-1} = T_{i,t}, \quad \text{for } i = h, f$$

で与えられる。ここで貨幣供給$M_{i,t}$は恒久的なトレンド要素$M^{\tau}_{i,t}$と一時的な変動要素$m_{i,t}$によって構成されていると仮定する。すなわち恒等式 $M_{i,t} \equiv m_{i,t} M^{\tau}_{i,t}$ for $i = h, f$ が各国で成立している。

このような不完備市場モデルの問題点として、２国間の対外純資産の分布が定常過程に従わないことが知られている。このときモデルの均衡均斉成長経路が収束する定常解が規定できない。この問題を回避するため、本稿では自国が自国債と外債で借り入れをするときそれぞれの自国債残高と外債残高に依存してリスクプレムアムを支払わなければならないと仮定する。

$$r^l_{h,t} = r^l_{w,t}[1 + \psi\{\exp(-B^l_{h,t}/M^{\tau}_{l,t}) - 1\}], \quad \bar{d} < 0, \quad \psi > 0, \quad \text{for} \quad l = h, f \tag{8}$$

ここで $r^l_{w,t}$ は l 国債の国際金融市場で決定される世界金利水準である。たとえば自国の家計が自国債で国際金融市場で借り入れをしようとすると、その債務残高と名目貨幣残高のトレンド部分の比が大きい程（すなわち $B^h_{h,t}/M^{\tau}_{h,t} \langle 0$）より大きいリスクプレミアムが世界金利 $r^h_{w,t}$ に上乗せされる。同様に自国の家計が外債で国際金融市場で借り入れをしようとすると、その債務残高と外国名目貨幣残高のトレンド部分の比が大きい程（すなわち $B^f_{h,t}/M^{\tau}_{f,t} \langle 0$）より大きいリスクプレミアムを世界金利 $r^f_{w,t}$ に上乗せされる。[10] 一方で簡単化のため外国はこのようなリスクプレミアムに直面しないと仮定する。そのとき $r^l_{f,t} = r^l_{w,t}$ for $l = h, f$ が満たされる。

本稿では簡単化のため購買力平価が成立していると仮定する。

$$S_t P_{f,t} = P_{h,t}$$

また両国債券市場の均衡条件（市場一掃条件）は

$$B^h_{h,t} + B^h_{f,t} = 0 \quad \text{and} \quad B^f_{h,t} + B^f_{f,t} = 0$$

であり、均衡において各期に両国債の発行残高はネットでゼロである。この際資源制約式は以下のように両国の予算制約式（3）および（4）を足し合わせる事により導出される。

10　リスクプレミアムの債務残高に対する弾力性を規定するパラメータ ψ は十分に小さい値を取るとする。

$$P_{h,t}(Y_{h,t}-C_{h,t})+r^h_{w,t-1}\psi\{\exp(-B^h_{h,t-1}/M^\tau_{h,t-1})-1\}B^h_{h,t-1} \\ +r^f_{w,t-1}\psi\{\exp(-B^f_{h,t-1}/M^\tau_{f,t-1})-1\}S_tB^f_{h,t-1}+P_{h,t}(Y_{f,t}-C_{f,t})=0$$

それゆえ２国の貿易収支の和はゼロである。

ここでNason and Rogers（2008）と同様に、両国のTFPおよび貨幣供給のトレンド要素の対数値 $\ln A_{i,t}$ and $\ln M^\tau_{i,t}$ はそれぞれ I(1) 過程 に従うと仮定する。

仮定 1: $\ln A_{i,t}$ と $\ln M^\tau_{i,t}$ は $i=h,f$ のそれぞれに対して **I(1)** 過程に従う。

また両国の貨幣供給のトレンド要素の比も I(1) 過程 に従うと仮定する。

仮定 2: $\ln M^\tau_{h,t}-\ln M^\tau_{f,t}$ は **I(1)** 過程に従う。

仮定 1 と 2 を満たすように、両国の貨幣供給トレンドの成長率 $\Delta\ln M^\tau_{i,t}$ は次のような独立な AR（1）過程に従うと仮定する。

$$\Delta\ln M^\tau_{i,t}=(1-\rho_M)\ln\gamma_M+\rho_M\Delta\ln M^\tau_{i,t-1}+\epsilon^i_{M,t},\quad \text{for } i=h,f$$

ここで $\ln\gamma_M$ と $\rho_M\in[0,1)$ は貨幣供給トレンド成長率の平均とAR過程の根であり、それぞれ両国に共通である。

しかしながら一方でNason and Rogers（2008）とは異なり、２国間のTFPの差 $\ln a_t\equiv\ln A_{h,t}-\ln A_{f,t}$ は定常な０階の和分過程（以後I（0）と記す）に従うと仮定する。

仮定 3: $\ln a_t$ は **I(0)** 過程に従う 。

この仮定３を設ける理由は、Nason and Rogers（2008）のようにTFPの格差が I（1）過程に従う場合、均衡におけるモデルの均斉成長経路を導出できないためである。このとき確率トレンドを除去した後のモデルの合理的期待均衡経路は確定的な定常解を持たない。このためモデルの確定的な定常解を保証するため、開放経済DSGEモデルを用いたMandelman et al.（2011）、Rabanal et al.（2011）、およびIreland（2013）の分析でも仮定されるように、本稿では両国のTFPは次の仮定４で規定されるような共和分過程（cointegrated process）に従うとする。

仮定４：$\ln A_{h,t}$と$\ln A_{f,t}$共和分ベクトル$[1\ -1]$の下で共和分過程に従い、以下のようなTFP成長率に関するECMを持つ。

$$\begin{aligned}\Delta \ln A_{h,t} &= \ln \gamma_A - \frac{\lambda}{2}(\ln A_{h,t-1} - \ln A_{f,t-1}) + \epsilon^h_{A,t} \\ \Delta \ln A_{f,t} &= \ln \gamma_A + \frac{\lambda}{2}(\ln A_{h,t-1} - \ln A_{f,t-1}) + \epsilon^f_{A,t}\end{aligned} \tag{9}$$

ここで $\gamma_A > 1$ は両国に共通なTFP成長率の平均であり $\lambda \in (0,1]$ は誤差修正スピードである。ECM(9)によればTFPの差は次のI(0)過程に従う。

$$\ln a_t = (1-\lambda)\ln a_{t-1} + \epsilon^h_{A,t} - \epsilon^f_{A,t} \tag{10}$$

このときもし誤差調整スピードが十分に0に近づくと、TFPの差はNason and Rogers（2008）で仮定されるようにI（1）過程に近似される。

最後に生産量と貨幣供給の景気循環要素 $y_{i,t}$ と $m_{i,t}$ は以下のような定常のAR(1)過程にそれぞれ従うと仮定する。

$$\begin{aligned}\ln y_{i,t} &= (1-\rho_y)\ln y + \rho_y \ln y_{i,t-1} + v^i_{y,t}, \quad i = h, f \\ \ln m_{i,t} &= (1-\rho_m)\ln m + \rho_m \ln m_{i,t-1} + v^i_{m,t}, \quad i = h, f\end{aligned}$$

ここで $\ln y$ と $\ln m$ は両国共通の平均であり、$\rho_y \in [0,1)$ と $\rho_m \in [0,1)$ 両国共通のAR（1）過程の根である。また本稿を通じて全ての構造ショックは独立である。

以上の必要条件および外生変数の確率過程を満たすように本稿の開放経済DSGEモデルの合理的期待均衡解は規定されるが、非線形性のためそのままでは均衡解を解析的に導出することができない。それゆえ本稿ではモデルの合理的期待均衡解の近似を行い、解析的な解を導出する。[11] この近似はモデルの確定的な定常解の近傍で1階のテイラー展開をする事により達成されるが、まず確定的な定常解を規定するためモデルの定常化を行う。このため、全ての内生変数から $A_{i,t}$ と $M^{\tau}_{i,t}$ を用いて確率的にトレンドを除去し、定常化変数 $c_{i,t} \equiv C_{i,t}/A_{i,t}$, $p_{i,t} \equiv P_{i,t}A_{i,t}/M^{\tau}_{i,t}$, $b^l_{i,t} \equiv B^l_{i,t}/M^{\tau}_{l,t}$, $\gamma^i_{A,t} \equiv A_{i,t}/A_{i,t-1}$, $\gamma^i_{M,t} \equiv M^{\tau}_{i,t}/M^{\tau}_{i,t-1}$, and $s_t \equiv S_t A_{h,t} M^{\tau}_{f,t}/(A_{f,t}M^{\tau}_{h,t})$ をそれぞれ定義する。この定常化変数を用いてモデルの必要条件（3)、(4)、(5)、（6)、および（7）式を書き直すと、定常化変数に関する確率差分方程式のシステムが得られ、このシステムの確定的な定常解が規定される。その上で以下のようにこの確定的な定常解の近傍で定常化された必要条件の対数線形近似を行う。ある定常解 x を持つ任意の変数 x_t に対して、$\hat{x}_t \equiv (x_t - x)/x \approx \ln x_t - \ln x$ と $\tilde{x}_t \equiv x_t - x$ を定義する。前者は定常解からの対数乖離であり後者は定常解からのレベルの乖離である。すると次のような対数線形化された必要条件が得られる。

11　この近似解の導出の詳細はKano（2013）を参照。

$$p_h(c-y)(\hat{p}_{h,t}+\hat{a}_t)+p_h c\hat{c}_{h,t}-py\hat{y}_{h,t}+\tilde{b}^h_{h,t}=\beta^{-1}\tilde{b}^h_{h,t-1}+\beta^{-1}\tilde{b}^f_{h,t-1} \tag{11}$$

$$\hat{p}_{h,t}+\hat{c}_{h,t}+(1+\hat{r}^h_{h,t})=E_t(\hat{p}_{h,t+1}+\hat{c}_{h,t+1}+\hat{\gamma}^h_{M,t+1}) \tag{12}$$

$$E_t\hat{s}_{t+1}-\hat{s}_t=(1+\hat{r}^h_{h,t})-(1+\hat{r}^f_{h,t})+E_t(\hat{\gamma}^h_{A,t+1}-\hat{\gamma}^f_{A,t+1}-\hat{\gamma}^h_{M,t+1}+\hat{\gamma}^f_{M,t+1}) \tag{13}$$

$$\hat{p}_{h,t}+\hat{c}_{h,t}-\hat{m}_{h,t}=\frac{1}{r^*}(1+\hat{r}^h_{h,t}) \tag{14}$$

$$p_h(c-y)\hat{p}_{h,t}+p_h c\hat{c}_{f,t}-p_h y\hat{y}_{f,t}-\tilde{b}^h_{h,t}-\tilde{b}^f_{h,t}=-\beta^{-1}\tilde{b}^h_{h,t-1}-\beta^{-1}\tilde{b}^f_{h,t-1} \tag{15}$$

$$\hat{s}_t-\hat{p}_{h,t}-\hat{c}_{f,t}-(1+\hat{r}^f_{w,t})=E_t(\hat{s}_{t+1}-\hat{p}_{h,t+1}-\hat{c}_{f,t+1}-\hat{\gamma}^f_{M,t+1}) \tag{16}$$

$$E_t\hat{s}_{t+1}-\hat{s}_t=(1+\hat{r}^h_{w,t})-(1+\hat{r}^f_{w,t})+E_t(\hat{\gamma}^h_{A,t+1}-\hat{\gamma}^f_{A,t+1}-\hat{\gamma}^h_{M,t+1}+\hat{\gamma}^f_{M,t+1}) \tag{17}$$

$$\hat{s}_t+\hat{m}_{f,t}-\hat{p}_{h,t}-\hat{c}_{f,t}=-\frac{1}{r^*}(1+\hat{r}^f_{w,t}) \tag{18}$$

$$(1+\hat{r}^h_{h,t})=(1+\hat{r}^h_{w,t})-\psi(1-\kappa)\tilde{b}^h_{h,t},\quad \text{および}\quad (1+\hat{r}^f_{h,t})=(1+\hat{r}^f_{w,t})-\psi(1-\kappa)\tilde{b}^f_{h,t} \tag{19}$$

ここで $\hat{\gamma}_{M,t}$ と $\hat{\gamma}_{A,t}$ は貨幣供給のトレンド要素成長率の平均からの乖離とTFP成長率の平均からの乖離であり、$\kappa\equiv 1/(1+r^*)=\beta/\gamma_M$ は定常解において市場で決まる割引ファクターである。自国のカバーなし金利裁定式（13）と外国のカバーなし金利裁定式（17）を比較すると、均衡では自国の自国債保有残高と外債保有残高は等しくなり $\tilde{b}^h_{h,t}=\tilde{b}^f_{h,t}$ が成立する。それゆえ自国の家計は自国債と外債を同じだけ保有し同じリスクプレミアムを支払うため２つの資産は完全代替であることがわかる。

さらにこれらの対数線形化された必要条件（11）-（18）は以下のように簡略化することが可能である。まず２国の内生変数の差を新しい変数 $\hat{c}_t\equiv\hat{c}_{h,t}-\hat{c}_{f,t}$, $\hat{\gamma}_{M,t}\equiv\hat{\gamma}^h_{M,t}-\hat{\gamma}^f_{M,t}$, $\hat{\gamma}_{A,t}\equiv\hat{\gamma}^h_{A,t}-\hat{\gamma}^f_{A,t}$, $\hat{m}_t\equiv\hat{m}_{h,t}-\hat{m}_{f,t}$ および $\hat{y}_t\equiv\hat{y}_{h,t}-\hat{y}_{f,t}$ をそれぞれ定義する。またさらに $\tilde{b}_t\equiv\tilde{b}^h_{h,t}=\tilde{b}^f_{h,t}$ と定義すると、上記必要条件は以下の３式に要約される。

$$\hat{s}_t=\kappa E_t\hat{s}_{t+1}-(1-\kappa)\hat{c}_t+(1-\kappa)\hat{m}_t-\kappa E_t(\hat{\gamma}_{A,t+1}-\hat{\gamma}_{M,t+1})-\psi\kappa(1-\kappa)\tilde{b}_t \tag{20}$$

$$\hat{s}_t+\hat{c}_t=\kappa E_t(\hat{s}_{t+1}+\hat{c}_{t+1})+(1-\kappa)\hat{m}_t \tag{21}$$

$$\tilde{b}_t=\beta^{-1}\tilde{b}_{t-1}+p_h y(\hat{y}_t-\hat{c}_t) \tag{22}$$

（20）式は自国と外国に共通なカバーなし金利裁定式であり、（21）式は自国と外国のオイラー方程式の差であり、（22）式は自国の対外純資産の遷移式である。

5．合理的期待均衡における為替レートのランダムウォークネス

カバーなしの金利裁定式（20）を確率トレンドを用いて書き直すと為替レートの対数値に関する次の確率差分方程式を得る。

$$\ln S_t = \kappa E_t \ln S_{t+1} + (1-\kappa)\ln M_t - (1-\kappa)\ln C_t - \psi\kappa(1-\kappa)\tilde{b}_t$$

ここで $\ln C_t \equiv \ln C_{h,t} - \ln C_{f,t}$ と $\ln M_t \equiv \ln M_{h,t} - \ln M_{f,t}$ である。定常解における割引ファクター κ が1より小さいので、この確率差分方程式を将来に向けて解く事により適切な横断面条件でバブル解を排除した後、次のPVMが導出される。

$$\ln S_t = (1-\kappa)\sum_{j=0}^{\infty}\kappa^j E_t\left(\ln M_{t+j} - \ln C_{t+j} - \psi\kappa\tilde{b}_{t+j}\right) \tag{23}$$

PVM（23）によれば、今期の為替レート $\ln S_t$ は将来のファンダメンタル $\ln M_{t+j} - \ln C_{t+j} - \psi\kappa\tilde{b}_{t+j}$ の期待割引現在価値で決定される。

PVM（23）はさらに為替レートの変化率 $\Delta\ln S_t$ に関する次のECMに書き換えることができる。[12]

$$\Delta\ln S_t = \frac{1-\kappa}{\kappa}\left(\ln S_{t-1} - \ln M_{t-1} + \ln C_{t-1}\right) + \psi(1-\kappa)\tilde{b}_{t-1} + u_{s,t} \tag{24}$$

ここで $u_{s,t}$ は合理的期待誤差であり、

$$u_{s,t} = (1-\kappa)\sum_{j=0}^{\infty}\kappa^j(E_t - E_{t-1})(\ln M_{t+j} - \ln C_{t+j} - \psi\kappa\tilde{b}_{t+j})$$

で規定される。この合理的期待誤差の前期の情報集合に対する条件付き期待値はゼロである。

一方2国のオイラー方程式の差である（21）式を確率トレンドを用いて書き直すと $\ln S_t - \ln M_t + \ln C_t$ に関する1階の確率差分方程式が次のように得られる。

$$\ln S_t - \ln M_t + \ln C_t = \kappa E_t(\ln S_{t+1} - \ln M_{t+1} + \ln C_{t+1}) + \kappa\rho_M\hat{\gamma}_{M,t} + \kappa(\rho_m - 1)\ln m_t$$

ここで κ は1より小さい値をとるので、上記確率差分方程式は将来に向かって解く事ができ、適切な横断面条件を用いてバブル解を排除すると次の一意的なファンダメンタル解が得られる。

$$\ln S_t = \ln M_t - \ln C_t + \frac{\kappa\rho_M}{1-\kappa\rho_M}\hat{\gamma}_{M,t} - \frac{\kappa(1-\rho_m)}{1-\kappa\rho_m}\ln m_t \tag{25}$$

（25）式を為替レートの変化率に関するECM（24）の右辺に代入すると

$$\Delta\ln S_t = \psi(1-\kappa)\tilde{b}_{t-1} + \frac{(1-\kappa)\rho_M}{1-\kappa\rho_M}\hat{\gamma}_{M,t-1} - \frac{(1-\kappa)(1-\rho_m)}{1-\kappa\rho_m}\ln m_{t-1} + u_{s,t} \tag{26}$$

を得る。

（26）式の重要なインプリケーションは、割引ファクターが1に近づくとき為替レートの対数値が漸近的にランダムウォークに近似されるということである。すなわち $\kappa\to 1$ の時

12　詳しい導出はKano（2013）を参照。

$$\lim_{\kappa\to 1} E_t \Delta \ln S_{t+1} = 0$$

が成立する。それゆえこの2国からなる開放経済DSGE モデルの合理的期待均衡解として、もし定常解の割引ファクターが1に十分近ければ為替レートのランダムウォークネスが近似的に生成される。このとき均衡での為替レート変化率は過去のいかなる情報とも直交し相関をもたない。

それではランダムウォークに従う為替レートはどのようなショックによって生成されるのだろうか。本稿のDSGEモデルに基づく分析の最大の利点は、合理的期待誤差 $u_{s,t}$ を経済的に意味のある構造的ショックで解釈することができる事にある。為替レート変化率の合理的期待誤差は

$$u_{s,t} = (E_t - E_{t-1})\Delta \ln S_t = \epsilon^h_{M,t} - \epsilon^f_{M,t} - \epsilon^h_{A,t} + \epsilon^f_{A,t} + (E_t - E_{t-1})\hat{s}_t.$$

で与えられるが、[13] 定常化された為替レートの合理的期待誤差 $(E_t - E_{t-1})\hat{s}_t$ をさらに解く必要がある。Kano（2013）は定常化された為替レート$\hat{s}_t$ が次の解析的な解を持つことを示す。

$$\hat{s}_t = \frac{\beta\eta - 1}{\beta p^*_h y^*}\tilde{b}_{t-1} + \frac{\beta\eta\lambda}{1-\beta\eta(1-\lambda)}\ln a_t + \frac{1-\kappa}{1-\kappa\rho_m}\hat{m}_t - \frac{1-\beta\eta}{1-\beta\eta\rho_y}\hat{y}_t + \frac{\rho_M(\kappa-\beta\eta)}{(1-\beta\eta\rho_M)(1-\kappa\rho_M)}\hat{\gamma}_{M,t}$$

ここで η は1より小さい値をとる定数で、κ が1に近づくとき同様に1に近づくことが示される。それゆえ定常化された為替レートの合理的期待誤差は

$$\begin{aligned}(E_t - E_{t-1})\hat{s}_t = {} & \frac{\beta\eta\lambda}{1-\beta\eta(1-\lambda)}(\epsilon^h_{A,t} - \epsilon^f_{A,t}) + \frac{1-\kappa}{1-\kappa\rho_m}(v^h_{m,t} - v^f_{m,t}) \\ & - \frac{1-\beta\eta}{1-\beta\eta\rho_y}(v^h_{y,t} - v^f_{y,t}) + \frac{\rho_M(\kappa-\beta\eta)}{(1-\beta\eta\rho_M)(1-\kappa\rho_M)}(\epsilon^h_{M,t} - \epsilon^f_{M,t})\end{aligned}$$

で与えられ、さらに為替レート変化率の合理的期待誤差は

$$\begin{aligned}u_{s,t} = {} & \epsilon^h_{M,t} - \epsilon^f_{M,t} - \frac{1-\beta\eta}{1-\beta\eta(1-\lambda)}(\epsilon^h_{A,t} - \epsilon^f_{A,t}) + \frac{1-\kappa}{1-\kappa\rho_m}(v^h_{m,t} - v^f_{m,t}) \\ & - \frac{1-\beta\eta}{1-\beta\eta\rho_y}(v^h_{y,t} - v^f_{y,t}) + \frac{\rho_M(\kappa-\beta\eta)}{(1-\beta\eta\rho_M)(1-\kappa\rho_M)}(\epsilon^h_{M,t} - \epsilon^f_{M,t}) \quad (27)\end{aligned}$$

となる。

このモデルでは定常解における割引ファクター κ は構造パラメーターである主観的割引ファクター β と貨幣供給のグロスの成長率の平均値 γ_M の比 $\kappa = \beta/\gamma_M$ として規定される。通常貨

13　定常化された為替レート $\hat{s}_t$ から、$\ln S_t = \ln M^\tau_t - \ln A_t + \hat{s}_t +$ が得られる。よって $\Delta \ln S_t = \Delta \ln M^\tau_t - \Delta \ln A_t + \hat{s}_t - \hat{s}_{t-1}$ である。

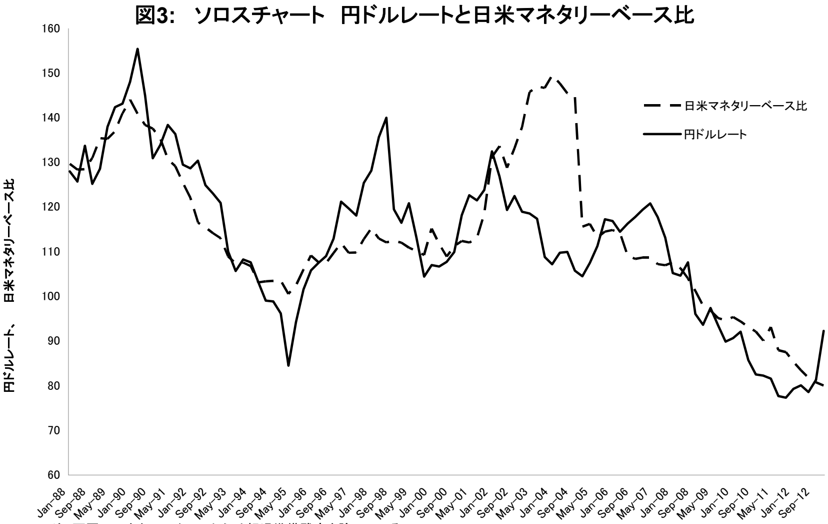
幣供給のグロスの成長率の平均値を１を若干超える値を取るので、κ が１に近づくということは β も１に近い値を取ることを意味する。また前述したようにパラメーター η も１に近い値となる。このとき上記為替レート変化率の合理的期待誤差（27）が貨幣供給のトレンド要素に対するショック $\epsilon^{h}_{M,t} - \epsilon^{f}_{M,t}$ に収束する。すなわち

$$\lim_{\kappa \to 1} \Delta \ln S_t = \lim_{\kappa, \beta \to 1} u_{s,t} = \epsilon^{h}_{M,t} - \epsilon^{f}_{M,t} \tag{28}$$

が極限で成り立つ。この理論的帰結である（28）式は重要である。市場で決まる割引ファクターが１に十分近づくと、まず（i）為替レートはランダムウォークに従い為替レートの最適予測は１期前の水準そのもので他のいかなる追加的な情報も予測の精度を改善させない。その上で（ii）このランダムウォークに従う為替レートは２国間の貨幣供給トレンド要素の差に対する予期せざるショックによって生成される。この際、他の構造的なショックは為替レートの変動にほぼ貢献することはない。

以上で示された本稿の理論的結果は、現実の為替レートのデータを観察し理解する上で極めて有益である。図３は1988年第１四半期から2013年第１四半期までの円ドルレート（実線）と日米のマネタリーベース比（破線）を同時にプロットしたもので、外国為替市場の参加者の間ではいわゆる「ソロスチャート」として知られる。[14] 図３の注目するべき点は、日米のマネタリーベースの比率がいくつかの時期を除き円ドルレートの長期的推移と高く相関している事である。日米マネタリーベース比率の遷移も極めてゆっくりとしたものなのでその多くの部分が

図3: ソロスチャート 円ドルレートと日米マネタリーベース比



注：両国のマネタリーベースからは超過準備残高を除いている。
データ出所：日本銀行および連邦準備制度

14　ここで日米のマネタリーベースからは超過準備を除いている。

確率トレンドから形成されていると考えれば、この観察事実は本稿で示した理論モデルのインプリケーションと極めて整合的である すなわち為替レート変動の大部分は､低い市場割引率の下、貨幣供給のトレンド要素に対する２国間格差に対するショックによって生成されるランダムウォーク過程によって極めてよく近似される。

６．結語：変動相場制下の為替レートの安定を目指して

本稿では変動為替相場制の下で観察される名目為替レートのランダムウォークネスが、シンプルな開放経済DSGEモデルの一意的な均衡解として近似的に生成可能であることを理論的に提示した｡この結果は､夜道の酩酊者の歩みにも似た予測困難な為替レートの変動を､他の様々な経済的側面に拡張されたDSGEモデルによってさらに深く理解する可能性を為替レート研究の将来に向け強く示唆している。

為替レートのランダムウォークネスを一意的な一般均衡解で描写することの重要性は、何が為替レート変動を産み出すファンダメンタルなショックなのか構造的に識別できる点にある。本稿のモデルの結論に従えば、２国間の貨幣供給トレンド要素の対数差に対する合理的期待誤差が為替レート変動を産み出す支配的な構造的ショックである。言い換えれば、外国為替市場の参加者が形成する中央銀行の長期的な金融政策スタンスまたは金融政策ルールに対する期待からの予期せざるサプライズこそが､為替レートを大きくそして激しく変動させる原因となる。それゆえ変動相場制下において為替レートの安定化を計るためには、各国中央銀行が市場参加者に金融政策ルールに基づいた政策運営を適切に理解浸透させ、金融政策ルールの裁量的な変更から生じる予期せざるサプライズを極力無くすことがまず満たされなければならない必要条件となる。その上でさらには金融政策ルールの遂行に関する国際的な政策協調が安定的な変動為替レートを達成する上で必須であることは言うまでもない。

最後に、この国際政策協調に関するインプリケーションは、国際通貨体制の「トリレンマ」の議論における変動相場制下の金融政策の独立性と必ずしも矛盾しないことは特記しておくべきであろう。ここで重要な点は、このモデルでは貨幣供給量の定常的な循環要因に影響を及ぼすような金融政策ショックは為替レートに大きな影響を持たない事である。それゆえ各国中央銀行は為替レートとは独立に、短中期の金融政策手段を国内の政策目標に対し遂行することが理論上は可能である。このように本稿の結論は、国際通貨体制における「トリレンマ」の議論にも新しい視点を提起している。

（2013年４月脱稿）

参考文献

Balke, N.S., Ma, J., Wohar, M.E., 2013, The contribution of economic fundamentals to movements in exchange rates, *Journal of International Economics*. 90, 1-16.

Beveridge, S., Nelson, C. R., 1981, A new approach to decomposition of economic time series into permanent and transitory components with particular attention to measurement of business cycles, *Journal of Monetary Economics* 7, 151-174.

Engel, C., West, K.D., 2005, Exchange rates and fundamentals, *Journal of Political Economy* 113, 485-517.

Hamilton, J.D., 1994,*Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Ireland, P., 2013, Stochastic growth in the United States and Euro area, Journal of the European Economic Association 1-24.

Kano, K., 2013, Exchange rates and fundamentals: closing a two-country model, Graduate School of Economics, Hitotsubashi University, mimeo.

Mandelman, F.S., Rabanal, P., Rubio-Ramírez, J.F., Vilán, D., 2011, Investment-specific technology shocks and international business cycles: an empirical assessment, *Review of Economic Dynamics* 14, 136-155.

Mark, N. C., 2001, *International Macroeconomics and Finance: Theory and Econometric Methods*, Black-well, Malden, MA.

Meese, R.A., Rogoff, K., 1983, Empirical exchange rate models of the seventies, *Journal of International Economics* 14, 3-24.

Nason, J.M., Rogers, J.H., 2008, Exchange rates and fundamentals: a generalization, *Board of Governors of the Federal Reserve System, International Finance Discussion Papers, 2008-948*.

Rabanal, P., Rubio-Ramírez, J.F., Tuesta, V., 2011, Cointegrated TFP processes and international busienss cycles, *Journal of Monetary Economics* 58, 156-171.

Sarno, L., Taylor, M. P., 2002,*The Economics of Exchange Rates*, Cambridge University Press, Cam-bridge.

Schmitt-Grohé, S., Uribe, M., 2003, Closing small open economy models, *Journal of International Economics* 61, 163-185.

Walsh, C., 2003,*Monetary Theory and Policy*, second edition, MIT Press, Cambridge, MA.

加納隆、2013、「為替レートの決まり方：為替で確実に儲ける方法!?」一橋大学経済学部編『教養としての経済学』2-6 節、有斐閣。